Lösungen

1. Eine Waage zeigt für die Masse eines Körpers $m = 1.2356$ kg an, wobei die systematische Messunsicherheit dieser Waage mit 0.01234 kg angegeben wurde. Der Körper mit Masse m wird durch eine konstante Kraft F in x-Richtung beschleunigt. Diese Kraft F wurde in einem Experiment mit einem systematischen Fehler von $\Delta F_{\text{sys}} = 0.10\,\text{N}$ fünfmal gemessen:

$$F_1 = 5.10\,\text{N} \qquad F_2 = 4.40\,\text{N} \qquad F_3 = 5.30\,\text{N} \qquad F_4 = 5.00\,\text{N} \qquad F_5 = 5.20\,\text{N}$$

(a) Wie ist das Ergebnis der Massenbestimmung unter Berücksichtigung der beiden Regeln bezüglich der Anzahl signifikanter Stellen anzugeben?

- *Regel 1: Messabweichungen auf eine signifikante Stelle runden.* Man rundet folglich die systematische Messabweichung von 0.01234 kg auf Hundertstel, d.h $\Delta m_{\text{sys}} \approx 0.01$ kg, denn die Ziffer 1 ist die erste signifikante Stelle (Nullen davor sind nur Platzhalter).
- *Regel 2: Die letzte signifikante Stelle des Messwerts soll dieselbe Grössenordnung haben wie die Messunsicherheit.* Wenn die Messunsicherheit auf Hundertstel gerundet wurde, so machen wir das gleiche mit dem Messwert und runden auf $m \approx 1.24$ kg. Die Ziffer 4 kommt daher, dass die 3 aufgerundet wird, wenn eine Ziffer ≥ 5 folgt (siehe Rundungsregeln).

Die Masse m ist daher anzugeben als

$$m = (1.24 \pm 0.01)\,\text{kg}$$

(b) Bestimme bei den obigen Messdaten zur Kraft F durch Rechnung von Hand mit Hilfe der gegebenen statistischen Formeln den arithmetischen Mittelwert $\bar{F}$, die Standardabweichung σ_F und den mittleren Fehler des Mittelwerts $\sigma_{\bar{F}}$ und gib den ausführlichen Lösungsweg an.

Im Folgenden steht F_i für die i-te gemessene Kraft. Für den Mittelwert $\bar{F}$ der oben angegebenen $N = 5$ Kräfte F_i gilt

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} F_i \\
&= \frac{1}{5} \cdot (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) \\
&= \frac{1}{5} \cdot (5.10\,\text{N} + 4.40\,\text{N} + 5.30\,\text{N} + 5.00\,\text{N} + 5.20\,\text{N}) \\
&= 5.00\,\text{N}
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung σ_F der fünf gemessenen Kräfte ($N = 5$) bestimmt man als

$$\begin{aligned}
\sigma_F &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(F_i - \bar{F}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5-1} \cdot \left[\left(F_1 - \bar{F}\right)^2 + \left(F_2 - \bar{F}\right)^2 + \left(F_3 - \bar{F}\right)^2 + \left(F_4 - \bar{F}\right)^2 + \left(F_5 - \bar{F}\right)^2\right]} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5-1} \cdot \left[(5.10\,\text{N} - 5.00\,\text{N})^2 + (4.40\,\text{N} - 5.00\,\text{N})^2 + \ldots + (5.20\,\text{N} - 5.00\,\text{N})^2\right]} \\
&= 0.35\,\text{N}
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts $\sigma_{\bar{F}}$ berechnet man mit $\sigma_F = 0.35\,\mathrm{N}$ und $N = 5$ als

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{F}} &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{N}}\\ &= \frac{0.35\,\mathrm{N}}{\sqrt{5}}\\ &= 0.16\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

(c) Wie gross ist der statistische Fehler der Kraft ΔF_{stat}?

Ist nichts weiter angegeben, suchen wir jeweils ein 68% Vertrauensintervall um den *best value* $\bar{F}$. In diesem Fall entspricht der statistische Fehler einer Grösse der Standardabweichung des Mittelwerts $\sigma_{\bar{x}}$. Das bedeutet für den statistischen Fehler der Kraft

$$\Delta F_{\mathrm{stat}} = \sigma_{\bar{F}} = 0.16\,\mathrm{N}$$

(d) Welche Beschleunigung a wirkt auf den Körper mit der Masse m in x-Richtung?

Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz gilt $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Die Buchstaben stammen aus dem Englischen - $\vec{F}$ für *force* (Kraft), $\vec{a}$ für *acceleration* (Beschleunigung) und m für *mass* (Masse). Da man nur die Bewegung entlang der x-Achse betrachtet, reicht es, die x-Komponenten anzuschauen und zu schreiben $F = m \cdot a$. Dies lässt sich umformen zu

$$a = \frac{F}{m}$$

Den *best value* für die Beschleunigung $\bar{a}$ findet man, indem man den Mittelwert der Kraft F und die gegebene Masse m einsetzt

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} = \frac{5.00\,\mathrm{N}}{1.24\,\mathrm{kg}} = 4.03\,\mathrm{m/s^2}$$

Die Beschleunigung a ist eine *indirekt* messbare Grösse. Daher gilt es, mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsformeln den systematischen Fehler Δa_{sys} und den statistischen Fehler Δa_{stat} dieses *best values* der Beschleunigung $\bar{a}$ zu finden. Es lohnt sich, zuerst einen Überblick über die Messunsicherheiten der direkt messbaren Grössen zu gewinnen:

$$\Delta F_{\mathrm{stat}} = 0.16\,\mathrm{N} \qquad \Delta m_{\mathrm{stat}} = 0 \qquad \Delta F_{\mathrm{sys}} = 0.10\,\mathrm{N} \qquad \Delta m_{\mathrm{sys}} = 0.01\,\mathrm{kg}$$

Man beachte hier, dass $\Delta m_{\mathrm{stat}} = 0$, da dieser hier vernachlässigbar sei. Weiter ist $\Delta F_{\mathrm{stat}} = \sigma_{\bar{F}}$ [siehe Teilaufgabe (c)]. Die systematischen Fehler sind gegeben bzw. müssen sinnvoll abgeschätzt werden.
Für die folgenden Rechnungen werden die partiellen Ableitungen der Beschleunigung a nach der Kraft F und der Masse m benötigt.

$$\frac{\partial a}{\partial F} = \frac{1}{m} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial a}{\partial m} = -\frac{F}{m^2}$$

- Zuerst soll der *systematische Fehler* Δa_{sys} berechnet werden. Man findet durch einsetzen in die Fehlerfortpflanzungsformel

$$\begin{aligned}\Delta a_{\mathrm{sys}} &= \left|\frac{\partial a}{\partial F} \cdot \Delta F_{\mathrm{sys}}\right| + \left|\frac{\partial a}{\partial m} \cdot \Delta m_{\mathrm{sys}}\right|\\ &= \left|\frac{1}{m} \cdot \Delta F_{\mathrm{sys}}\right| + \left|-\frac{F}{m^2} \cdot \Delta m_{\mathrm{sys}}\right|\\ &= \left|\frac{1}{1.24\,\mathrm{kg}} \cdot 0.10\,\mathrm{N}\right| + \left|-\frac{5.00\,\mathrm{N}}{(1.24\,\mathrm{kg})^2} \cdot 0.01\,\mathrm{kg}\right|\\ &= 0.11\,\mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

- Den *statistischen Fehler* Δa_{stat} findet man durch einsetzen in die Formel

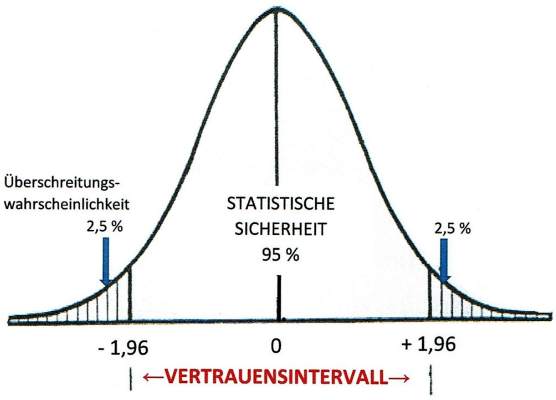
$$\begin{aligned}\Delta a_{\text{stat}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial F}\cdot\Delta F_{\text{stat}}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial m}\cdot\Delta m_{\text{stat}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{m}\cdot\Delta F_{\text{stat}}\right)^2+\left(-\frac{F}{m^2}\cdot\Delta m_{\text{stat}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{1.24\,\text{kg}}\cdot 0.16\,\text{N}\right)^2+\left(-\frac{5.00\,\text{N}}{(1.24\,\text{kg})^2}\cdot 0\right)^2}\\ &= 0.13\,\text{m/s}^2\end{aligned}$$

Damit erhält man eine Beschleunigung a des Körpers in x-Richtung von

$$a = (4.03 \pm 0.11 \pm 0.13)\,\text{m/s}^2$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% liegt der *wahre Wert* der Beschleunigung in diesem Intervall um den gegebenen *best value* $\bar{a}$ [für ein Vertrauensintervall von 95% siehe Teilaufgabe (e)]. Weiter bestätigen wir, dass die gewählte Anzahl Messungen $N = 5$ als sinnvoll zu betrachten ist, da der statistische und der systematische Fehler in der gleichen Grössenordnung sind.

(e) Innerhalb von welchem Beschleunigungsintervall liegt die wahre Beschleunigung des Körpers mit der Masse m mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%?



Um den *wahren Wert* mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% im Vertrauensintervall des *best values* zu haben, muss dieses rund zwei σ (genauer 1.96σ) breit sein (siehe Abbildung).
Die Werte für den *best value* der Beschleunigung $\bar{a}$ und den systematischen Fehler Δa_{sys} bleiben unverändert [siehe Teilaufgabe (d)], $\Delta m_{\text{stat}} = 0$ bleibt ebenfalls. Der statistische Fehler der Kraft ΔF_{stat} berechnet sich für das 95%-Vertrauensintervall wiefolgt:

$$\Delta F_{\text{stat}} = 2\sigma_{\bar{F}} = 0.32\,\text{N}$$

Man findet mit der Fehlerfortpflanzungsformel, analog zum Fall mit dem 68% Vertrauensintervall, den statistischen Fehler der Beschleunigung für das 95% Vertrauensintervall

$$\begin{aligned}\Delta a_{\text{stat}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial F}\cdot\Delta F_{\text{stat}}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial m}\cdot\Delta m_{\text{stat}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{m}\cdot 2\sigma_{\bar{F}}\right)^2+\left(-\frac{F}{m^2}\cdot 2\sigma_{\bar{m}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{1.24\,\text{kg}}\cdot 0.32\,\text{N}\right)^2+\left(-\frac{5.00\,\text{N}}{(1.24\,\text{kg})^2}\cdot 0\right)^2}\\ &= 0.26\,\text{m/s}^2\end{aligned}$$

Der wahre Wert für die Beschleunigung liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$a = (4.03 \pm 0.11 \pm 0.26)\,\mathrm{m/s^2}$$

2. Die Messgrösse F_i wurde mehrfach mit verschiedenen Messungen bestimmt. Die systematischen Fehler sind unterschiedlich, wie die folgende Auflistung zeigt:

$$F_1 = (5.1 \pm 0.2)\,\mathrm{N} \quad F_2 = (4.4 \pm 0.1)\,\mathrm{N} \quad F_3 = (5.3 \pm 0.2)\,\mathrm{N} \quad F_4 = (5.0 \pm 0.3)\,\mathrm{N} \quad F_5 = (5.2 \pm 0.2)\,\mathrm{N}$$

(a) Berechne den gewichteten Mittelwert der Kraft $\bar{F}_g$. Inwiefern unterscheidet sich das Ergebnis vom arithmetischen Mittelwert $\bar{F}$ aus Aufgabe 1? Warum?

Die ΔF_i sind die quadratisch summierten systematischen und statistischen Messfehler. In dieser Beispielaufgabe hier sind diese gegeben, ansonsten liessen sie sich wiefolgt berechnen:

$$\Delta F_i = \sqrt{\Delta F_{\mathrm{sys}}^2 + \Delta F_{\mathrm{stat}}^2}$$

Um nun den gewichteten Mittelwert zu finden, müssen zuerst die Gewichte g_i bestimmt werden.

$$\left.\begin{aligned} F_1 \pm \Delta F_1 &= (5.1 \pm 0.2)\,\mathrm{N} \\ F_2 \pm \Delta F_2 &= (4.4 \pm 0.1)\,\mathrm{N} \\ F_3 \pm \Delta F_3 &= (5.3 \pm 0.2)\,\mathrm{N} \\ F_4 \pm \Delta F_4 &= (5.0 \pm 0.3)\,\mathrm{N} \\ F_5 \pm \Delta F_5 &= (5.2 \pm 0.2)\,\mathrm{N} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad g_i = \frac{1}{\Delta F_i^2} \quad \longrightarrow \left\{\begin{aligned} g_1 &= 25 \\ g_2 &= 100 \\ g_3 &= 25 \\ g_4 &= 11.1 \\ g_5 &= 25 \end{aligned}\right.$$

Damit lässt sich nun der gewichtete Mittelwert $\bar{F}_g$ berechnen als

$$\begin{aligned} \bar{F}_g &= \frac{\sum g_i \cdot F_i}{\sum g_i} \\ &= \frac{g_1 \cdot F_1 + g_2 \cdot F_2 + g_3 \cdot F_3 + g_4 \cdot F_4 + g_5 \cdot F_5}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5} \\ &= \frac{25 \cdot 5.1\,\mathrm{N} + 100 \cdot 4.4\,\mathrm{N} + 25 \cdot 5.3\,\mathrm{N} + 11.1 \cdot 5.0\,\mathrm{N} + 25 \cdot 5.2\,\mathrm{N}}{25 + 100 + 25 + 11.1 + 25} \\ &= 4.76\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Der gewichtete Mittelwert ist in diesem Fall kleiner als der arithmetische Mittelwert. Dies liegt daran, dass die Messwerte mit kleinen Messfehlern ΔF_i hier stärker gewichtet werden als solche mit grossen Messungenauigkeiten.
Achtung: Dieses Resultat für $\bar{F}_g$ verlangt nach der Angabe einer Messungenauigkeit. Deshalb ist im Weiteren Teilaufgabe (b) zu berücksichtigen.

(b) Wie gross ist die Messunsicherheit ΔF des gewichteten Mittelwerts $\bar{F}_g$?

Für die Messunsicherheit ΔF (nicht zu verwechseln mit ΔF_i) gilt die Formel

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{\sqrt{\sum g_i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{25 + 100 + 25 + 11.1 + 25}} \\ &= 0.07\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Damit erhält man ein Ergebnis von

$$F_g = (4.76 \pm 0.07)\,\mathrm{N}$$

Rückmeldungen zu diesen Lösungen, insbesondere Hinweise auf Fehler und Tippfehler, sind sehr erwünscht und an c.meier@unibas.ch zu richten - vielen Dank! ☺