

IU2

Modul Universalkonstanten

Gravitationskonstante

Neben der Formulierung seiner Bewegungsgesetze war ISAAK NEWTON's zweiter und vielleicht grösster Beitrag zur Physik die Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes. Es beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, Planeten oder auch kleineren Teilchen, die eine Bewegung hervorruft, welche durch die KEPLER'schen Gesetze beschrieben werden kann. Das Gesetz wurde 1666 von NEWTON formuliert und 1687 als Kapitel seines Monumentalwerks *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publiziert.

Versuch IU2 - Gravitationskonstante

Neben der Formulierung seiner Bewegungsgesetze war ISAAK NEWTON's zweiter und vielleicht grösster Beitrag zur Physik die Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes. Es beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, Planeten oder auch kleineren Teilchen, die eine Bewegung hervorruft, welche durch die KEPLER'schen Gesetze beschrieben werden kann. Das Gesetz wurde 1666 von NEWTON formuliert und 1687 als Kapitel seines Monumentalwerks *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publiziert.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Wie ist Trägheit definiert?
- Was ist Torsion?
- Was ist das Drehmoment?
- Wie lautet die Einheit der Gravitationskonstanten?
- Wie funktioniert das Experiment nach Cavendish?
- Was ist eine harmonische Bewegung?
- Wie lautet die zugehörige Bewegungsgleichung?
- Was geschieht, wenn man einen Schacht durch den Erdmittelpunkt bohrt und einen Ball hinein wirft?

1.2 Theorie

1.2.1 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Das zweite KEPLER'sche Gesetz besagt, dass die Kraft, welche mit der Gravitation wechselwirkt assoziiert wird, eine Zentralkraft ist. Das heißt die Kraft wirkt längs einer Verbindungsline zwischen den Schwerpunkten zweier wechselwirkender Körper. Wenn wir annehmen, dass die Gravitationswechselwirkung eine allgemeine Eigenschaft ist, muss andererseits die Kraft F , die mit der Wechselwirkung assoziiert wird, proportional zur „Menge“ an Materie in jedem Körper sein, d.h. proportional den entsprechenden Massen m_1 und m_2 . Wir können daher schreiben:

$$F = m_1 \cdot m_2 \cdot f(r) \quad (1.1)$$

Es ist schwierig, die Abhängigkeit der Kraft F von der Entfernung r zu bestimmen. Im Prinzip wird die Abhängigkeit experimentell bestimmt, indem die Kraft zwischen den Massen m_1 und m_2 bei verschiedenen Entfernungen gemessen wird, wodurch die Beziehung zwischen F und r schließlich abgeleitet werden kann. Eine solche experimentelle Bestimmung ist in der Tat möglich. Sie verlangt jedoch eine empfindliche Messapparatur und für AP-Verhältnisse relativ grosse Geduld.

NEWTON hatte jedoch keine solchen experimentellen Möglichkeiten. Er erkannte, motiviert durch die KEPLER-Gesetze, wie das Gravitationsgesetz beschaffen sein musste:

Die Gravitationswechselwirkung zwischen zwei Körpern kann durch eine zentrale Anziehungs- oder Gravitationskraft ausgedrückt werden, die den Massen der Körper direkt proportional und dem Quadrat der Entfernungen zwischen ihnen umgekehrt proportional ist.

Oder etwas moderner ausgedrückt:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.2)$$

wobei γ die Proportionalitäts- oder Gravitationskonstante ist. Mit der Gleichung (1.2) sind jedoch die beiden wechselwirkenden Körper als Punktmassen zu verstehen. Für die Beschreibung der Planetenbahnen vernachlässigt man dabei die Ausdehnung der Planeten, da diese klein gegenüber den Radien der Planetenbahnen sind.

1.2.2 Das Experiment von Cavendish

Das Kernstück der Gravitationswaage nach Cavendish ist ein an einem dünnen Torsionsfaden waagerecht aufgehängter leichter Querbalken, der an jedem Ende im Abstand d zum Aufhängepunkt eine kleine Bleikugel der Masse m_2 trägt. Diese Kugeln werden von zwei grossen Bleikugeln der Masse m_1 gemäss Gleichung (1.2) angezogen. Obwohl diese Kraft weniger als 10^{-9}N beträgt, kann sie mit der extrem empfindlichen Torsionswaage nachgewiesen werden. Die Bewegung der kleinen Bleikugeln beobachtet und misst man über einen Lichtzeiger (siehe Abb. 1.1)

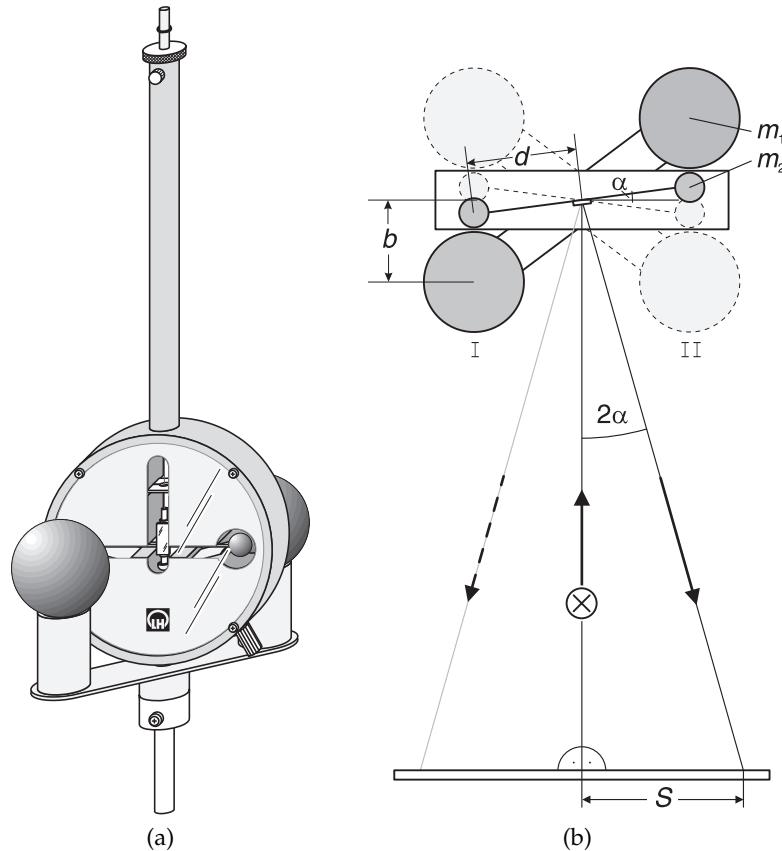


Abbildung 1.1: Gravitations-Drehwaage nach Cavendish (links) und schematische Darstellung des Lichtzeigers (rechts).

Dieser wird mit Hilfe eines beleuchteten Hohlspiegels erzeugt, der starr am Querbalken des Torsionspendels befestigt ist. Aus dem zeitlichen Verlauf der Bewegung, der Masse m_1 und der Geometrie der Anordnung ermittelt man dann die Gravitationskonstante anhand der im nächsten Abschnitt folgenden Überlegungen.

1.2.3 Bestimmung der Gravitationskonstanten

Die Gravitationskraft zwischen je zwei Bleikugeln der Masse m_1 und m_2 im Abstand b beträgt gemäss (1.2):

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} \quad (1.3)$$

Wenn sich die grossen Bleikugeln in der Position I befinden (Abb. 1.1), wirkt somit auf das Torsionspendel das Drehmoment

$$M_I = 2Fd = 2\gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} d \quad (1.4)$$

Dieses wird nun kompensiert durch das Rückstellmoment des Torsionsfadens, so dass das Pendel die Gleichgewichtslage α_I einnimmt. Das bedeutet, das Drehmoment M_I kann auch geschrieben werden als

$$M_I = -D\alpha_I \quad (1.5)$$

wobei D die sogenannte Winkelrichtgrösse, oder auch Direktionsmoment genannt, ist. Durch Umschwenken der grossen Kugeln in Position II kehrt man nun die Kräfte symmetrisch um, so dass nun ein Drehmoment $M_{II} = -M_I$ wirksam ist und das Pendel gedämpfte Schwingungen um die neue Gleichgewichtslage α_{II} ausführt. Die Differenz der beiden Drehmomente ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} M_I - M_{II} &= M_I - (-M_I) = 2M_I = 4\gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} d \\ &= -D\alpha_I - (-D\alpha_{II}) = D(\alpha_{II} - \alpha_I) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Es folgt sofort

$$4\gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} d = D(\alpha_{II} - \alpha_I) \quad (1.7)$$

Die Winkelrichtgrösse D kann aus der Lösung zur Bewegungsgleichung der gedämpften Schwingung eines Drehpendels bestimmt werden (siehe Appendix). Man erhält

$$D = \left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \delta^2 \right) J = \frac{(4\pi^2 + T^2\delta^2)J}{T^2} \quad (1.8)$$

wobei T die Schwingungsdauer, δ die Abklingkonstante der gedämpften Schwingung und J das Trägheitsmoment des Torsionspendels ist. Letzteres wird nun approximiert, indem man die beiden kleinen Kugeln als punktförmig annimmt und die Massen der restlichen Teile des Torsionspendels (Querbalken, Spiegel, Torsionsfaden) vernachlässigt. Somit erhält man:

$$J = 2m_2 d^2 \quad (1.9)$$

Somit ergibt sich für Gleichung (1.8):

$$D = \frac{2(4\pi^2 + T^2\delta^2)m_2 d^2}{T^2} \quad (1.10)$$

Setzt man dies in Gleichung (1.7) ein und löst nach der Gravitationskonstante auf, so erhält man schliesslich:

$$\gamma = \frac{(4\pi^2 + T^2\delta^2)b^2 d}{2m_1 T^2} (\alpha_{II} - \alpha_I) \quad (1.11)$$

1.2.4 Messung des Drehwinkels α

In Abb. 1.1 ist die Messung des Drehwinkels α mit Hilfe des Lichtzeigers beschrieben. Der Beleuchtungsstrahl des Lichtzeigers steht hier senkrecht zur Nulllage des Torsionspendels (die Ruhelage ohne grosse Bleikugeln). Die Lichtzeigerposition für die Nullage stimmt mit dem Skalennullpunkt überein. Zwischen dem Drehwinkel α , der Lichtzeigerposition S und dem Abstand L_0 zwischen Skala und Torsionspendel besteht der Zusammenhang:

$$\tan(2\alpha) = \frac{S}{L_0} \quad (1.12)$$

respektive für sehr kleine Winkel α :

$$\alpha = \frac{S}{2L_0} \quad (1.13)$$

In Abb. 1.2 wird der Hohlspiegel unter dem waagerechten Winkel β beleuchtet. Die Lichtzei-

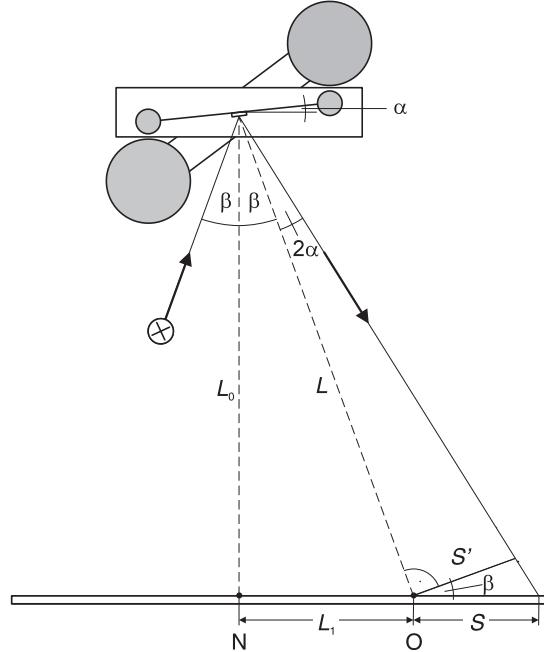


Abbildung 1.2: Schema zur Bestimmung der Auslenkung mit dem Lichtzeiger.

gerposition O für die Nullage des Torsionspendels hat den Abstand L_1 zum Aufpunkt N der Normalen und den Abstand

$$L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2} \quad (1.14)$$

zum Hohlspiegel. Für eine Drehung des Torsionspendels um den Winkel α aus der Nullage findet man die Zusammenhänge:

$$S' = L \tan(2\alpha) \quad (1.15)$$

und

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sin(90^\circ - \beta - 2\alpha)}{\sin(90^\circ + 2\alpha)} = \cos(\beta) - \tan(2\alpha) \sin(\beta) \quad (1.16)$$

Der Winkel α ist in jedem Fall sehr klein (er beträgt höchstens 1.5°), die Abmessungen der Gravitations-Drehwaage lassen Beleuchtungswinkel β oberhalb 30° nicht zu. Daher ist die Näherung

$$\frac{S'}{S} = \cos(\beta) = \frac{L_0}{L} \quad (1.17)$$

zulässig. Mit der zusätzlichen Näherung $\tan(2\alpha) \approx 2\alpha$ folgt somit insgesamt

$$\alpha = \frac{S}{2} \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \quad (1.18)$$

Diese Gleichung (1.18) ist mit einem systematischen Fehler von $1 - 2\%$ behaftet, bei der Berechnung der Differenz der beiden Gleichgewichtslagen $\alpha_I - \alpha_{II}$ wird dieser systematische Fehler jedoch beinahe vollständig kompensiert.

Für den Spezialfall der Beleuchtung unter kleinen Winkeln β und für $L_0 \gg L_1$, erhält man aus

Gleichung (1.18) die bereits hergeleitete Gleichung (1.13).

Gleichung (1.18) ist auch gültig, wenn der Beleuchtungsstrahl nach oben oder unten gekippt ist. Man richtet auch in diesem Fall die Ableseskala waagerecht aus und lässt Höhenänderungen des Lichtzeigers unberücksichtigt.

Die Nulllage des Torsionspendels, also der Punkt O in Abb. 1.2, ist in der Regel vor der Versuchsdurchführung nicht bekannt. Zur Bestimmung von L_1 misst man daher in guter Näherung den Abstand zwischen dem Normalenaufpunkt N und der Lichtzeigerposition für die Gleichgewichtslage I . Diese Näherung ist erlaubt, da $|\alpha| \ll 1$. Bei nicht zu schräger Beleuchtung des Hohlspiegels, also für $\beta \ll 1$, kann $L_1 = 0$ angenommen werden.

Aus diesen Überlegungen zum Drehwinkel α kann nun für die Versuchssituation in Abb. 1.1 Gleichung (1.13) in Gleichung (1.11) eingesetzt werden. Es ergibt sich damit:

$$\gamma = \frac{(4\pi^2 + T^2\delta^2)b^2d}{4m_1T^2L_0}(S_{II} - S_I) \quad (1.19)$$

Analog wird für die Versuchssituation in Abb. 1.2 Gleichung (1.18) in Gleichung (1.11) eingesetzt:

$$\gamma = \frac{(4\pi^2 + T^2\delta^2)b^2dL_0}{4m_1T^2(L_0^2 + L_1^2)}(S_{II} - S_I) \quad (1.20)$$

1.2.5 Gegendrehmoment der "zweiten" Bleikugel

Neben dem Drehmoment durch die Anziehungskraft F der jeweils unmittelbar gegenüberliegenden grossen Bleikugel (Abstand b) wird ein Gegendrehmoment durch die Anziehungs- kraft F_2 der jeweils entfernteren Kugel (Abstand d') erzeugt (siehe Abb. 1.3). Für das Drehmo-

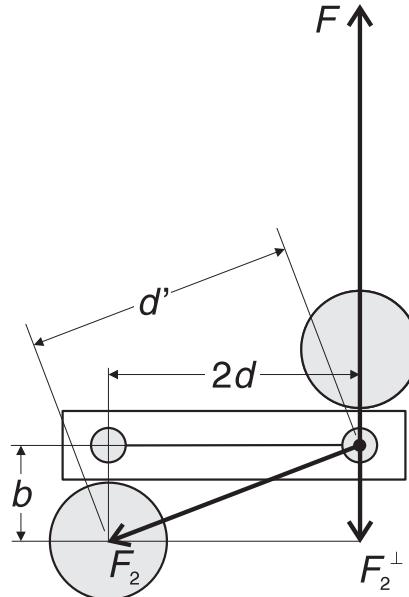


Abbildung 1.3: Schema zur Berechnung des Gegendrehmoments durch die "zweite" Bleikugel.

ment M_I gilt daher genauer als in Gleichung (1.4) angegeben

$$M_I = 2(F - F_2^\perp)d \quad (1.21)$$

wobei aus der Geometrie in Abb. 1.3 folgt

$$F_2^\perp = F_2 \frac{b}{d'} \quad (1.22)$$

Die Kraft F_2 findet man, indem man sowohl F , als auch F_2 mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz ausdrückt, beide nach der Gravitationskonstante auflöst und dann gleichsetzt:

$$\begin{aligned} F &= \gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{F b^2}{m_1 m_2} \\ F_2 &= \gamma \frac{m_1 m_2}{d'^2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{F_2 d'^2}{m_1 m_2} \\ \Rightarrow F_2 &= F \frac{b^2}{d'^2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Setzt man nun Gleichung (1.23) in Gleichung (1.22), und diese dann in Gleichung (1.21) ein, so ergibt sich für M_I :

$$M_I = 2F \left(1 - \frac{b^3}{d'^3}\right) d \quad (1.24)$$

Die Grösse d' erhält man sofort aus der Geometrie aus Abb. 1.3:

$$d' = \sqrt{(2d)^2 + b^2} \quad (1.25)$$

Vergleicht man nun Gleichung (1.24) mit Gleichung (1.4), so sieht man, dass sie bis auf den Klammerausdruck identisch sind. Das bedeutet, dass analog zu vorher die selbe Herleitung zur Gravitationskonstante gemacht werden kann, sodass Gleichungen (1.19) und (1.20) nur mit einem Korrekturfaktor K ergänzt werden müssen. Man erhält schliesslich für die Versuchssituation in Abb. 1.1

$$\gamma = \frac{(4\pi^2 + T^2 \delta^2) b^2 d}{4m_1 T^2 L_0} (S_{II} - S_I) K \quad (1.26)$$

und für die Versuchssituation in Abb. 1.2

$$\gamma = \frac{(4\pi^2 + T^2 \delta^2) b^2 d L_0}{4m_1 T^2 (L_0^2 + L_1^2)} (S_{II} - S_I) K \quad (1.27)$$

wobei

$$K = \frac{1}{1 - \frac{b^3}{d'^3}} \quad \text{und} \quad d' = \sqrt{(2d)^2 + b^2} \quad (1.28)$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchsdaten

Grösse	Wert
Masse der grossen Kugeln	$1500 \text{ g} \pm 10 \text{ g}$
Abstand der kleinen Kugeln vom Aufhängepunkt	$4.94 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm}$
Abstand der kleinen Kugeln von der grossen Kugel	$4.85 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm}$
Abstand des Aufhängepunktes des Fadens zum Massstab	$277 \text{ cm} \pm 0.5 \text{ cm}$

1.3.2 Versuchsaufbau und Justage

- Den Versuchsaufbau vor dem Beginn der Messungen mindestens zwei bis drei Stunden erschütterungsfrei stehen lassen, so dass das Pendel in die Gleichgewichtslage einschwenken kann.

1.3.3 Messungen

Wichtig: Beim Umschwenken des Kugelträgers unbedingt Erschütterungen des Gehäuses etwa durch Anschlagen der Bleikugeln vermeiden.

- Laser einschalten.
- Messe in einem Zeitraum von 10 Minuten die Stellung des Lichtzeigers im Gleichgewichtszustand (Position I).
- Träger mit den Bleikugeln zügig aber vorsichtig von Position I in Position II schwenken und Stoppuhr starten.
- Stellung des Lichtzeigers auf der Skala während 30 min mindestens alle 30 s ablesen, bis die Schwingung nachgelassen hat.
- Warte etwa 60 bis 90 Minuten, bis das System wieder im Gleichgewichtszustand ist.
- Messe erneut in einem Zeitraum von 10 Minuten die Stellung des Lichtzeigers im Gleichgewichtszustand (Position II).
- Den Träger mit den Bleikugeln von Position II in Position I zurückschwenken und Messung der Oszillation wiederholen.
- Laser ausschalten.

1.3.4 Aufgaben zur Auswertung

- Bestimme die Gleichgewichtslagen im Ruhezustand.
- Bestimme die Periode, die Abklingkonstante und die Gleichgewichtslage beider Oszillationsmessreihen, indem du einen Fit der entsprechenden Funktion an die Daten legst.
- Bilde *gewichtete* Mittelwerte für die beiden Gleichgewichtslagen, die Periode und die Abklingkonstante.
- Bestimme die Gravitationskonstante G , den Korrekturfaktor K und die korrigierte Gravitationskonstante G_{korr} .
- Führe eine vollständige Fehlerrechnung durch.
- Vergleiche den Literaturwert mit deinem Ergebnis.

Appendix

Im Folgenden wird der Ausdruck für die Winkelrichtgrösse D , wie sie in Gleichung (1.8) auf- taucht, hergeleitet.

Bei einem Drehpendel wird die Auslenkung durch ein Drehmoment verursacht. Dabei erfährt das Drehpendel ein Rückstellmoment, das der Torsion entgegenwirkt. So erhält man

$$M = -D\varphi(t) \quad (\text{A.1})$$

wobei D die Winkelrichtgrösse und $\varphi(t)$ der Auslenkwinkel, abhängig von der Zeit, sind. Gleichzeitig ist aber ein Drehmoment nichts anderes als die zeitliche Ableitung des Drehimpulses L , also

$$M = \frac{d}{dt}L(t) = \frac{d}{dt}J\omega(t) = J\frac{d}{dt}\omega(t) = J\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) \quad (\text{A.2})$$

Da beide gleich dem Drehmoment M sind, darf man sie gleichsetzen und man erhält die Bewegungsgleichung für ein harmonisches Drehpendel:

$$J\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = -D\varphi(t) \quad (\text{A.3})$$

Führt man nun noch eine Reibung ein, so ist diese analog zu einem Faden- oder Federpendel proportional zur zeitlichen Ableitung von $\varphi(t)$. Diese unterstützt das entgegengesetzte Rückstellmoment, so dass die Bewegungsgleichung zum gedämpften Drehpendel nun lautet

$$J\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = -(D\varphi(t) + \tilde{D}\frac{d}{dt}\varphi(t)) \quad (\text{A.4})$$

wobei \tilde{D} die Dämpfungskonstante ist. Formt man die Gleichung ein wenig um und definiert $\omega_0^2 := D/J$, so erhält man

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + \frac{\tilde{D}}{J}\frac{d}{dt}\varphi(t) + \omega_0^2\varphi(t) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen macht man den Ansatz $\varphi(t) = e^{\lambda t}$. Setzt man dies ein und formt ein wenig um, so ergibt sich

$$\left(\lambda^2 + \frac{\tilde{D}}{J}\lambda + \omega_0^2\right)e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Diese Gleichung ist genau dann null, wenn die Klammer null ist. Das heisst, es liegt eine quadratische Gleichung für λ vor, dessen Lösungen sind:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\tilde{D}}{J} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{D}}{J}\right)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\tilde{D}}{2J} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{D}}{2J}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (\text{A.7})$$

Wie man sofort sieht, ist es sinnvoll, eine neue Konstante, die sich später in der Lösung zur Bewegungsgleichung als die Abklingkonstante herausstellt, zu definieren. Definiert man also:

$$\delta := \frac{\tilde{D}}{2J} \quad (\text{A.8})$$

Damit wird Gleichung (A.7) zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (\text{A.9})$$

Setzt man Gleichung (A.8) rückwirkend in Gleichung (A.5) ein, so führt man sie auf die allgemein bekannte Form eines gedämpften Pendels:

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + 2\delta \frac{d}{dt}\varphi(t) + \omega_0^2\varphi(t) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Betrachtet man nun Gleichung (A.9), so kann man drei unterschiedliche Fälle berücksichtigen. Der Kriechfall, falls $\delta > \omega_0$, der aperiodische Grenzfall, falls $\delta = \omega_0$ und der Schwingfall, falls $\delta < \omega_0$. Mit diesen drei Fällen ergeben sich unterschiedliche Lösungen zur Bewegungsgleichung (A.10). In diesem Versuch kann man aber nur den Schwingfall beobachten, daher ist auch hier nur dieser Fall interessant. In diesem Fall wird der Wurzausdruck komplex und man schreibt zunächst $\lambda_{1,2} = -\delta - \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, damit der Radikand sicher reell ist. Dann konstruiert man sich eine Lösung mit den entsprechenden $\lambda_{1,2}$ und dem gemachten Ansatz für $\varphi(t)$. So kommt man auf folgende Lösung zu Gleichung (A.10):

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{A.11})$$

wobei gilt

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (\text{A.12})$$

Stellt man nun Gleichung (A.12) ein wenig um, erhält man den gesuchten Ausdruck für die Winkelrichtgrösse:

$$D = \left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \delta^2 \right) J \quad (\text{A.13})$$