

IU1

Modul Universalkonstanten

Erdbeschleunigung

Das Ziel des vorliegenden Versuches ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g aus der Fallzeit eines Körpers beim (fast) freien Fall durch die Luft.

Versuch IU1 - Erdbeschleunigung

Das Ziel des vorliegenden Versuches ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g aus der Fallzeit eines Körpers beim (fast) freien Fall durch die Luft.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Wie hängt die Erdbeschleunigung von der Fallzeit und der Fallhöhe ab?
- Wieso ist die Erdbeschleunigung ortsabhängig?
- Was werden wir mit diesem Versuchsaufbau finden, wenn wir die Erdbeschleunigung
 - a) hier in Basel am Rhein (Uferstrasse 90) messen?
 - b) in einem Flugzeug in 10 km Höhe bei einer Geschwindigkeit von 900 km/h untersuchen?
 - c) zukünftig in der Internationalen Raumstation ISS in 385 km über dem Erdboden bei einer konstanten Geschwindigkeit von 7.66 km/s messen?
- Wie funktioniert eine Lichtschranke? Was ist demnach für dieses Experiment besonders zu beachten?

1.2 Theorie

1.2.1 Das Fallexperiment

Die Newton'sche Bewegungsgleichung für den freien Fall eines Körpers im Gravitationsfeld lautet

$$F_G = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{d.h.} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g \quad (1.1)$$

Die wirkende Kraft ist also allein die Gewichtskraft $F_G = mg$ des Körpers.

Aus der Differentialgleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ lässt sich durch Integration leicht der Zusammenhang zwischen Erdbeschleunigung g , Fallzeit T und Fallstrecke L berechnen.

In Wirklichkeit ist der Fall durch die Luft natürlich nicht ganz frei. Der Luftwiderstand wirkt der Beschleunigung entgegen. Die obige Bewegungsgleichung erhält daher einen zusätzlichen Term:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g - f(v) \quad (1.2)$$

Der Luftwiderstand wächst mit der Geschwindigkeit für relativ geringe Geschwindigkeiten linear und für hohe Geschwindigkeiten quadratisch an. Für unser Experiment kann man von hoher Geschwindigkeit sprechen und es gilt

$$f(v) = \beta v^2 \quad (1.3)$$

Wir wollen im Folgenden die Bewegungsgleichung des freien Falls unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g - \beta v^2$$

lösen. Dazu führen wir als erstes eine Trennung der Variablen durch, die dann einfach integriert werden kann.

$$dt = \frac{dv}{g - \beta v^2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t_E} dt = \int_0^{v_E} \frac{dv}{g - \beta v^2}$$

Durch die Substitution $x^2 = \frac{\beta v^2}{g}$ erhalten wir daraus

$$t_E = \frac{1}{\sqrt{g\beta}} \int_0^{\sqrt{\frac{\beta}{g}} v_E} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{g\beta}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\beta}{g}} v_E \right)$$

Verallgemeinern wir dieses Ergebnis für alle Zeiten und alle Geschwindigkeiten und lösen nach v auf, so ergibt sich

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \tanh \left(t \sqrt{g\beta} \right)$$

Daraus erhalten wir die in der Zeit t zurückgelegte Strecke s einfach durch eine Integration über die Zeit (Substitution $x = t' \sqrt{g\beta}$)

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(t') dt' = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \int_0^t \tanh \left(t' \sqrt{g\beta} \right) dt' \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{t \sqrt{g\beta}} \tanh x dx = \frac{1}{\beta} \ln \cosh \left(t \sqrt{g\beta} \right) \end{aligned}$$

Wir haben also als Endergebnis erhalten

$$s(t) = \frac{1}{\beta} \ln \cosh \left(t \sqrt{g\beta} \right) \quad (1.4)$$

Für kleine Argumente $t \sqrt{g\beta}$ erhalten wir wieder den freien Fall durch die Näherungen

$$\cosh x \approx 1 + \frac{1}{2} x^2, \quad \ln(1+y) \approx y$$

$$\Rightarrow s(t) \approx \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{2} t^2 g\beta = \frac{1}{2} g t^2$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchszubehör

Komponente	Anzahl
Stahlkugel Ø 16 mm	1
Haltemagnet	1
STE-Si-Diode N 4007	1
Gabellichtschanke	2
Verbindungskabel 6-polig	2
Digitalzähler	1
Stativfuss	1
Stativstange 150 cm	1
Stativstange 25 cm	1
Muffe	1
Höhenmassstab 1 m	1
Sockel	1
Angelschnur	1
Laststück	1
Experimentierkabel	1

1.3.2 Versuchsaufbau und Justage

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1.1, die Beschreibung des Haltemagneten in Abb. 1.2 dargestellt.

- Lange Stativstange mittels Stellschrauben am Stativfuss lotrecht ausrichten.
- Gabellichtschranken mit roter LED nach oben zeigend befestigen und über 6-poliges Verbindungskabel mit dem Eingang *E* und *F* des Digitalzählers verbinden.
- Kurze Stativstange mit Muffe montieren und Haltemagnet nach unten zeigend befestigen.
- Pluspol des 5V-Ausganges über Relais des Digitalzählers mit einer Buchse und Masseanschluss mit der zweiten Buchse des Haltemagneten verbinden und STE Si-Diode auf Eingang des Haltemagneten stecken (siehe Abb. 1.2).
- Digitalzähler einschalten und Taste Time (für Fallzeit in s) drücken.
- Taste *E* und *F* mehrmals drücken, bis jeweils die Anzeige $\downarrow\uparrow$ erscheint.
- Stahlkugel an Magneten hängen.
- Obere Gabellichtschanke und Haltemagnet mit Stahlkugel exakt so ausrichten, dass die Lichtschranke durch die Unterkante der Stahlkugel unterbrochen wird (rote LED beobachten).
- Höhenmassstab mit Zeigern aufstellen und oberen Zeiger als Wegnullpunkt auf die Unterkante der oberen Gabellichtschanke ausrichten.

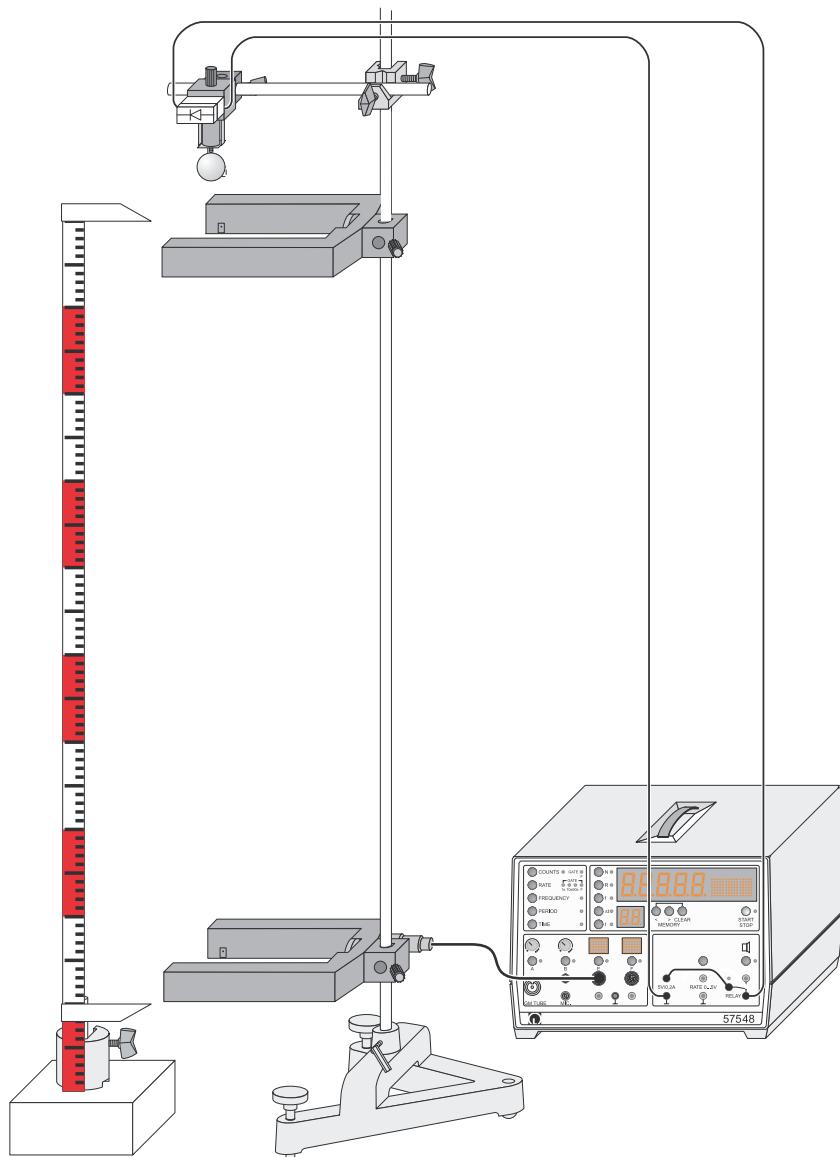


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau zur Messung der Fallzeit zwischen Haltemagnet und zwei Gabellichtschranken.

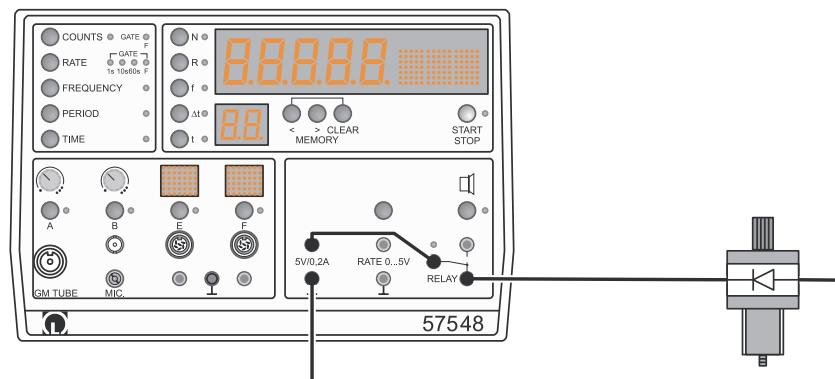


Abbildung 1.2: Beschaltung von Haltemagnet und Digitalzähler.

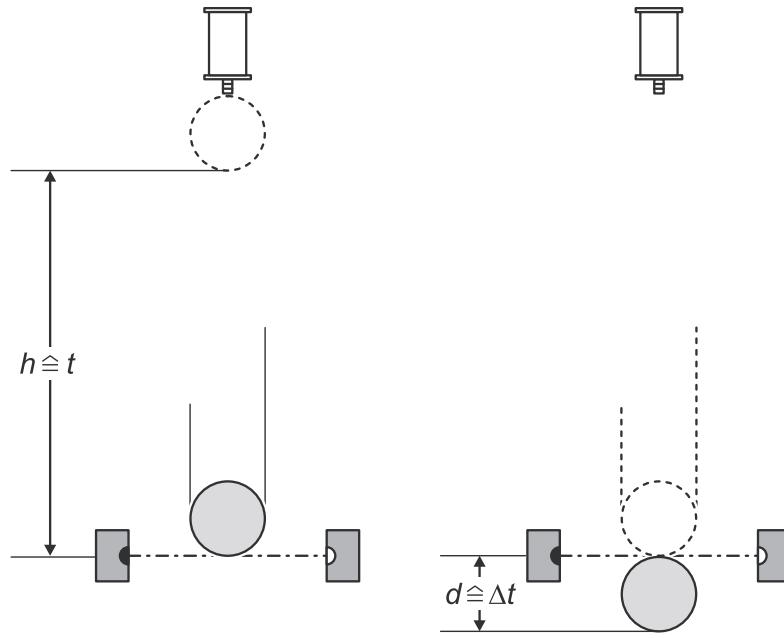


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung zur Messung der Fallzeit t und der Verdunkelungszeit Δt einer fallenden Kugel mit einer Lichtschranke.

1.3.3 Messungen

- Obere Gabellichtschranke auf Fallstrecke 10 cm und untere Gabellichtschranke zur Fallstrecke 40cm schieben.
- Mithilfe des Lots Anordnung so justieren, dass beide Lichtschranken durch die Angelschnur unterbrochen werden.
- Stahlkugel anhängen und Rändelschraube soweit eindrehen, dass Stahlkugel gerade noch haftet.
- Stahlkugel anhängen und Messung mit Taste START STOP starten.
- Taste START STOP erneut drücken, sobald die Kugel heruntergefallen ist.
- Fallzeit t für beide Lichtschranken in s ablesen und notieren (Um zwischen den Schranken zu wechseln, Tasten E und F benutzen).
- Taste Δt zweimal drücken und Verdunkelungszeit (siehe Abb. 1.3) Δt für beide Lichtschranken in ms ablesen und notieren.
- Messung von Fallzeit und Verdunkelungszeit 10 mal wiederholen.
- Untere Gabellichtschranke auf Fallstrecke 50 cm schieben und gegebenenfalls mit Angelschnur die Justierung der Anordnung überprüfen.
- Messungen für vier weitere Fallstrecken wiederholen (variiere dazu nur die Fallhöhe der zweiten Lichtschranke auf 60, 70, 80 und 90 cm. Die der ersten Lichtschranke bleibt konstant 10 cm).

1.3.4 Aufgaben zur Auswertung

Numerisch

- Berechne jeweils für jede Fallstrecke den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwertes der zehn Fallzeiten, dasselbe für die zehn Verdunkelungszeiten.
- Berechne aus der Bewegungsgleichung für den freien Fall die Fallstrecke als Funktion der Zeit.
- Bestimme mit Hilfe dieser Formel aus den gemachten Messungen die Erdbeschleunigung g für jede Fallhöhe und schätze die entsprechenden Unsicherheiten ab. Trage das experimentell bestimmte g mit Fehlerbalken als Funktion der Fallhöhe auf.
- Berechne aus allen Werten der Erdbeschleunigung den Mittelwert und die zugehörigen Fehler.

Methode 1

- Erstelle ein Diagramm der Fallstrecke zur zweiten Lichtschranke und der Fallstrecke von der ersten zu der zweiten Lichtschranke als Funktion der Fallzeit. Bestimme daraus die Erdbeschleunigung mit einem Fit (erkläre kurz wie) und berechne die Fehler.
- Das Ganze lässt sich auch schlauer machen. Erstelle dazu ein Diagramm der Fallstrecke als Funktion von der Zeit im Quadrat (für die gleichen zwei Fallstrecken wie vorher). Bestimme daraus die Erdbeschleunigung mit einem Fit (erkläre kurz wie) und berechne die Fehler.
- Vergleiche diese zwei Resultate. Was fällt dir auf?

Methode 2

- Berechne (mithilfe der Verdunkelungszeiten) die momentanen Geschwindigkeiten beim Durchqueren der beiden Lichtschranken.
- Erstelle ein Diagramm der momentanen Geschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe (nur für die zweite Lichtschranke). Bestimme daraus die Erdbeschleunigung mit einem Fit (erkläre kurz wie) und berechne die Fehler.

Diskussion

- Vergleiche die erhaltenen Erdbeschleunigungen untereinander und mit dem Theoriewert. Diskutiere die verschiedenen möglichen systematischen Abweichungen.
- Ist die Anzahl der Messwiederholungen pro Fallhöhe ($N=10$) sinnvoll? Begründe!

1.4 Literatur

- W. Greiner, "Klassische Mechanik", Verlag Harri Deutsch
- D. Meschede, "Gerths Physik", Springer Verlag