IM4

Modul Mechanik

Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel, zwischen denen Energie ausgetauscht werden kann, werden als *gekoppelte Pendel* bezeichnet. Auf jedes Pendel wirkt ein durch die Schwerkraft verursachtes Richtmoment, welches versucht, das Pendel in die Ruhelage zurückzuführen. Zudem macht sich die vorhandene Kopplung in Form eines zusätzlichen Richtmoments bemerkbar, das so wirkt, dass die Feder möglichst entspannt wird.
In diesem Versuch werden sowohl gleich- und gegenphasige Schwingungen als auch Schwebungen untersucht. Dazu werden die Kreisfrequenzen τ_ω, τ_Ω, τ und T_s experimentell bestimmt und anschließend untereinander und mit theoretischen Werten verglichen.

Versuch IM4 - Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel, zwischen denen Energie ausgetauscht werden kann, werden als *gekoppelte Pendel* bezeichnet. Auf jedes Pendel wirkt ein durch die Schwerkraft verursachtes Richtmoment, welches versucht, das Pendel in die Ruhelage zurückzuführen. Zudem macht sich die vorhandene Kopplung in Form eines zusätzlichen Richtmoments bemerkbar, das so wirkt, dass die Feder möglichst entspannt wird.
In diesem Versuch werden sowohl gleich- und gegenphasige Schwingungen als auch Schwebungen untersucht. Dazu werden die Kreisfrequenzen τ_ω, τ_Ω, τ und T_s experimentell bestimmt und anschließend untereinander und mit theoretischen Werten verglichen.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Was ist eine harmonische Schwingung?
- Wie lautet ihre Bewegungsgleichung?
- Wie lauten ihre Lösungen?
- Wodurch unterscheidet sich eine harmonische von einer gedämpften Schwingung?
- Wo treten harmonische und wo gedämpfte Schwingungen auf?
- Was ist Schwebung?

1.2 Theorie

1.2.1 Das physikalische und das mathematische Pendel

Als physikalisches Pendel bezeichnet man einen starren Körper, der unter Wirkung der Schwerkraft Drehschwingungen um eine feste Achse ausführen kann. Sei J das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse und M das rücktreibende Drehmoment. Dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$J\ddot{\phi} = M = -mgl \cdot \sin(\phi) \tag{1.1}$$

Bezeichnet man $D = mgl$ als das *Direktionsmoment* und betrachtet nur kleine Auslenkungswinkel ϕ, dann gilt:

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi} &= -mgl \cdot \sin(\phi) \\ &\approx -mgl \cdot \phi \\ &= -D\phi \end{aligned} \tag{1.2}$$

Somit lautet die Schwingungsgleichung des physikalischen Pendels:

$$\ddot{\phi} + \frac{D}{J}\phi = 0 \tag{1.3}$$

Als Lösung von (1.3) findet sich die ungedämpfte harmonische Schwingung

$$\phi(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \delta) \tag{1.4}$$

mit der Frequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{2\pi}{T_0}$, der Phase δ und der darausfolgenden Schwingungsdauer des Pendels:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{1.5}$$

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels erhält man als idealisierten Fall des physikalischen Pendels, indem man die gesamte Masse m des physikalischen Pendels in seinem Schwerpunkt S konzentriert betrachtet. Dabei habe der Schwerpunkt von der Drehachse den Abstand l. Damit ergibt sich (1.5) zu:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.6}$$

1.2.2 Bewegungsgleichungen des gekoppelten Pendels

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen des gekoppelten Pendels betrachten wir zwei identische Pendel, die in der gleichen Ebene schwingen können und die durch eine weiche Feder gekoppelt sind. Im vorliegenden Versuch übernimmt eine an einem Faden frei bewegliche Kopplungsmasse die Aufgabe der Feder (siehe Abbildung 1.1).

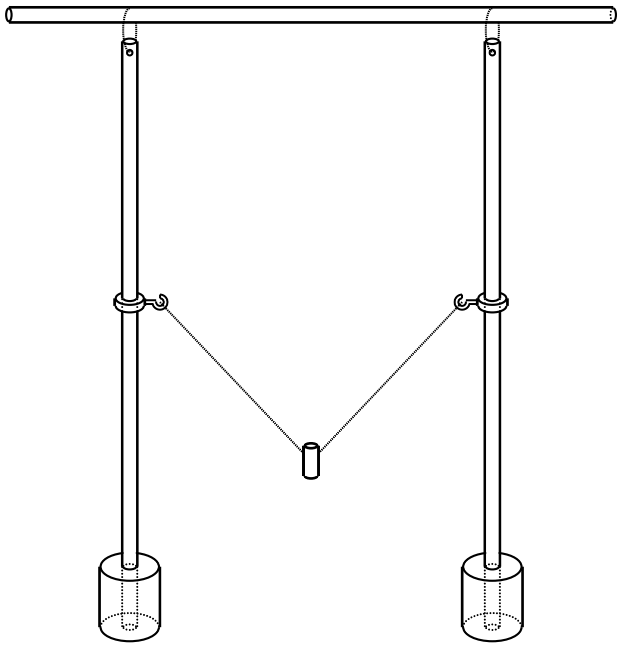

Abbildung 1.1: Versuchsaufbau

Jedes Pendel besitzt die Masse m im Abstand L von der Drehachse. Infolge der Schwerkraft beträgt das rücktreibende Moment M_g bei kleinen Auslenkungen ϕ für beide Pendel wie in (1.1),(1.2):

$$M_g = -mgL\phi = -D_g\phi \tag{1.7}$$

Des Weiteren greift an beiden Pendeln ein Kopplungsmoment M_f an. Dieses Kopplungsmoment hängt von der Federkonstante k, dem Angriffspunkt der Kopplungsfeder l und der Differenz der beiden Auslenkungen ϕ_1 und ϕ_2 ab, gemäß:

$$M_f = -kl^2 \cdot (\phi_1 - \phi_2) = -D_f \cdot (\phi_1 - \phi_2) \tag{1.8}$$

Da die Feder bereits eine gewisse Spannung besitzt, wenn sich die Pendel in ihrer Ruhelage befinden, entsteht ein weiteres Moment M_0. Durch die Federspannung zeigen die Pendel in ihrer Ruhelage einen Ausschlag α, bzw. $-\alpha$ bezüglich ihrer Vertikallage. Berechnet man nun die Auslenkungen ϕ_1 und ϕ_2 von dieser Ruhelage, so fällt das Moment der Vorspannung M_0 aus der Rechnung heraus, da das Moment des einen Pendels $mgl\alpha$ durch das Moment des anderen Pendels $-mgl\alpha$ aufgehoben wird.

Somit findet man für die Momentengleichungen der Pendel 1 und 2:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{g,1} + M_{f,1} \\ &= -D_g\phi_1 + D_f\left(\phi_2 - \phi_1\right) \\ M_2 &= M_{g,2} + M_{f,2} \\ &= -D_g\phi_2 - D_f\left(\phi_2 - \phi_1\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Einsetzen von (1.9) in die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels (1.1) führt somit auf die simultanen Differentialgleichungen des gekoppelten Pendels:

$$\begin{aligned} J\frac{d^2\phi_1}{dt^2} &= -D_g\phi_1 + D_f\left(\phi_2 - \phi_1\right) \\ J\frac{d^2\phi_2}{dt^2} &= -D_g\phi_2 - D_f\left(\phi_2 - \phi_1\right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Durch Addition (Subtraktion) dieser Gleichungen (1.10) erhält man die Differentialgleichungen der Winkelsumme $(\phi_1 + \phi_2)$ (Winkeldifferenz $(\phi_1 - \phi_2)$):

$$\begin{aligned} J\frac{d^2\left(\phi_2 + \phi_1\right)}{dt^2} &= -D_g\left(\phi_2 + \phi_1\right) \\ J\frac{d^2\left(\phi_2 - \phi_1\right)}{dt^2} &= -\left(D_g + 2D_f\right)\left(\phi_2 - \phi_1\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Beide Gleichungen (1.11) stellen, wie (1.3), ungedämpfte harmonische Schwingungen dar. Als Lösungen findet man analog zu (1.4):

$$\begin{aligned} \left(\phi_2 + \phi_1\right) &= 2A \cdot \cos\left(\omega t + \delta\right) \\ \left(\phi_2 - \phi_1\right) &= 2B \cdot \cos\left(\Omega t + \Delta\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

wobei $2A$ und $2B$ die Amplituden der Summe, respektive der Differenz der Winkelausschläge der beiden Pendel und ω, Ω die Kreis- oder Eigenfrequenzen sind:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{D_g}{J}} \\ \Omega &= \sqrt{\frac{D_g + 2D_f}{J}} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Zur Beschreibung der Bewegungen der einzelnen Pendel, trennt man die Variablen ϕ_1 und ϕ_2 durch Subtraktion, respektive Addition der Gleichungen (1.12):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A \cdot \cos\left(\omega t + \delta\right) - B \cdot \cos\left(\Omega t + \Delta\right) \\ \phi_2 &= A \cdot \cos\left(\omega t + \delta\right) + B \cdot \cos\left(\Omega t + \Delta\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Genaueres Betrachten der Bewegungsgleichungen (1.14) zeigt, dass die allgemeinste Bewegung jedes Pendels durch eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzen, eine sogenannte *Schwebung*, beschrieben wird. Dabei entspricht die Anzahl der Eigenschwingungen der Anzahl Freiheitsgrade des Systems (ein Pendel hat einen Freiheitsgrad und somit eine Eigenschwingung, zwei Pendel haben zwei Freiheitsgrade und somit zwei Eigenschwingungen). Auf Grund der speziellen Art der Kopplung ist die Eigenfrequenz ω gerade die Eigenfrequenz des ungekoppelten Pendels (siehe Abschnitt 1.2.1).

1.2.3 Anfangsbedingungen

Damit die im vorherigen Abschnitt 1.2.2 hergeleiteten Bewegungsgleichungen (1.14) eindeutig bestimmt sind, müssen die vier unbekannten Variablen A, B, δ, Δ bestimmt werden. Dazu benötigt man vier zusätzliche voneinander unabhängige Bewegungsgleichungen oder Anfangsbedingungen. Dazu kann man die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Beide Pendel werden zur gleichen Zeit $t = 0$ in der Lage $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ losgelassen, so dass sie in Phase schwingen. Für $t = 0$ ergeben sich somit die folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi & \frac{d\phi_1}{dt} &= 0 \\ \phi_2 &= \phi & \frac{d\phi_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Einsetzen von (1.15) in (1.14) liefert:

$$\begin{aligned} A\cos(\delta) - B\cos(\Delta) = A\cos(\delta) + B\cos(\Delta) &= \phi \\ -A\omega\sin(\delta) + B\Omega\sin(\Delta) = -A\omega\sin(\delta) - B\Omega\sin(\Delta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

wobei $\omega \neq 0$ und $\Omega \neq 0$. Damit findet man für die gesuchten Größen:

$$\begin{aligned} A &= \phi & B &= 0 \\ \delta &= 0 & \Delta &= \text{unbestimmt} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Somit wird die Schwingung des Systems durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi \cdot \cos(\omega t) \tag{1.18}$$

Diese Schwingung enthält nur eine Eigenfrequenz ω und wird als *symmetrisch* bezeichnet. Dabei ist nicht die Symmetrie der Bewegung, sondern die Symmetrie der Gleichungen gemeint. Es lässt sich gut beobachten, dass in diesem Fall die Kopplung der beiden Pendel gar nicht zur Geltung kommt und die Feder fortwährend im selben Spannungszustand bleibt.
Die Schwingungsdauer ist gegeben durch:

$$\tau_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D_g}} \tag{1.19}$$

2. Fall: Die beiden Pendel werden zur Zeit $t = 0$ in der Lage $\phi_1 = -\phi$, bzw. $\phi_2 = \phi$ losgelassen, so dass sie gegenphasig in entgegengesetztem Sinn schwingen. Damit lassen sich die Anfangsbedingungen folgendermassen aufstellen:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\phi & \frac{d\phi_1}{dt} &= 0 \\ \phi_2 &= +\phi & \frac{d\phi_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Einsetzen von (1.20) in (1.14) liefert:

$$\begin{aligned} -A\cos(\delta) + B\cos(\Delta) = A\cos(\delta) + B\cos(\Delta) &= \phi \\ -A\omega\sin(\delta) + B\Omega\sin(\Delta) = -A\omega\sin(\delta) - B\Omega\sin(\Delta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

wobei $\omega \neq 0$ und $\Omega \neq 0$. Damit findet man für die gesuchten Grössen:

$$\begin{aligned} A &= 0 & B &= \phi \\ \delta &= \text{unbestimmt} & \Delta &= 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Somit wird die Schwingung des Systems durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\phi_2 = -\phi_1 = \phi \cdot \cos(\Omega t) \tag{1.23}$$

Auch in diesem Fall enthält die Schwingung nur eine Eigenfrequenz Ω. Diese Form der Schwingung wird *asymmetrisch* bezeichnet.
Die Schwingungsdauer ist gegeben durch:

$$\tau_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D_g + 2D_f}} \tag{1.24}$$

3. Fall: Zur Zeit $t = 0$ wird das Pendel 1 aus der Lage $\phi_1 = 0$ und das Pendel 2 aus der Lage $\phi_2 = \phi$ losgelassen. Die Anfangsbedingungen sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0 & \frac{d\phi_1}{dt} &= 0 \\ \phi_2 &= \phi & \frac{d\phi_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Einsetzen von (1.25) in (1.14) liefert:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) = A\cos(\delta) - B\cos(\Delta) &= 0 \\ -A\omega\sin(\delta) + B\Omega\sin(\Delta) &= 0 \\ \phi_2(0) = A\cos(\delta) + B\cos(\Delta) &= \phi \\ -A\omega\sin(\delta) - B\Omega\sin(\Delta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

wobei auch hier $\omega \neq 0$ und $\Omega \neq 0$ gilt. Damit findet man für die gesuchten Grössen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\phi}{2} & B &= \frac{\phi}{2} \\ \delta &= 0 & \Delta &= 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Damit erhält man die folgenden Schwingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\phi}{2}\left(\cos(\omega t) - \cos(\Omega t)\right) \\ \phi_2 &= \frac{\phi}{2}\left(\cos(\omega t) + \cos(\Omega t)\right) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Einfachheitshalber werden diese Gleichungen (1.28) mit den folgenden Additionstheoremen umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Somit werden die Gleichungen (1.28) zu:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi \sin\left(\frac{\Omega+\omega}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)\\ \phi_2 &= \phi \cos\left(\frac{\Omega+\omega}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)\end{aligned} \tag{1.30}$$

Nach (1.13) wird bei schwacher Kopplung $(D_f \ll D_g)$ $\Omega-\omega$ klein gegen $\Omega+\omega$. Somit ändern sich die beiden Funktionen $\sin\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)$ und $\cos\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)$ langsam gegen $\sin\left(\frac{\Omega+\omega}{2}t\right)$ und $\cos\left(\frac{\Omega+\omega}{2}t\right)$. Daher kann die Bewegung jedes einzelnen Pendels als Schwingung mit der Frequenz $\frac{\Omega+\omega}{2}$ aufgefasst werden, deren Amplitude einer langsamen periodischen Änderung der Frequenz $\frac{\Omega-\omega}{2}$ unterworfen ist. Dies wird als *Schwebung* bezeichnet. Zwischen den beiden Bewegungen der beiden Pendel besteht dabei ein Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$. Das bedeutet, dass das eine Pendel zum Stillstand kommt, wenn das andere Pendel die maximale Amplitude erreicht. Die Schwingungsenergie wandert also andauernd zwischen den beiden Pendeln hin und her. Im Experiment wird diese Energie schliesslich als Konsequenz der Reibung zunehmend in Wärme umgewandelt. Diese Dämpfung wurde in der Rechnung jedoch nicht berücksichtigt.
Die Schwingungsdauer der Schwingung mit der Frequenz $\frac{\Omega+\omega}{2}$ ist gegeben durch:

$$\tau = \frac{4\pi}{\Omega+\omega} \tag{1.31}$$

Die Zeit zwischen zwei Stillständen desselben Pendels bezeichnet man als *Schwebungszeit* T_s. Ein Pendel steht still, wenn gilt:

$$\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \qquad \text{bzw. } 0, \pi, 2\pi, \dots \tag{1.32}$$

Somit ist die Schwebungszeit T_s gegeben durch:

$$T_s = \frac{2\pi}{\Omega-\omega} \tag{1.33}$$

Zusätzlich findet man die folgenden Zusammenhänge zwischen den vier charakteristischen Zeiten τ_ω, τ_Ω, τ und T_s:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_\omega}+\frac{1}{\tau_\Omega}\right) \tag{1.34a}$$

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{\tau_\Omega}-\frac{1}{\tau_\omega} \tag{1.34b}$$

1.2.4 Kopplungsgrad

Wenn das Trägheitsmoment J der Pendel bekannt ist, kann aus den Schwingungszeiten τ_ω und τ_Ω das Kopplungsmoment D_f dynamisch bestimmt werden. Nach (1.19) und (1.24) gilt:

$$\begin{aligned}D_g &= \frac{4\pi^2 J}{\tau_\omega^2}\\ D_f &= \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2 J}{\tau_\Omega^2} - D_g\right)\end{aligned} \tag{1.35}$$

Damit findet man:

$$D_f = 2\pi^2 J \left(\frac{1}{\tau_\Omega^2} - \frac{1}{\tau_\omega^2} \right) \tag{1.36}$$

Den Kopplungsgrad k definiert man als das Verhältnis $k = \frac{D_f}{D_g + D_f}$. Mit den Werten für D_g und D_f ergibt sich somit:

$$\frac{2\pi^2 J \left(\frac{1}{\tau_\Omega^2} - \frac{1}{\tau_\omega^2} \right)}{\frac{4\pi^2 J}{\tau_\omega^2} + 2\pi^2 J \left(\frac{1}{\tau_\Omega^2} - \frac{1}{\tau_\omega^2} \right)} = \frac{\frac{1}{\tau_\Omega^2} - \frac{1}{\tau_\omega^2}}{\frac{1}{\tau_\Omega^2} + \frac{1}{\tau_\omega^2}} = \frac{\tau_\omega^2 - \tau_\Omega^2}{\tau_\omega^2 + \tau_\Omega^2} = k \tag{1.37}$$

Des Weiteren können k und D_f statisch durch den Vergleich der Auslenkungen der beiden Pendel bestimmt werden. Wird beispielsweise das Pendel 2 in der Lage ϕ_2 festgehalten, so stellt sich bei dem Pendel 1 die Auslenkung ϕ_1 ein. Unter Berücksichtigung der Masse m' des Pendelschaftes gilt:

$$D_f \left(\phi_2 - \phi_1 \right) = D_g \phi_1 = g \left(mL + m'l \right) \phi_1 \tag{1.38}$$

und somit:

$$D_f = g \left(mL + m'l \right) \frac{\phi_1}{\phi_2 - \phi_1} \tag{1.39}$$

Aus dem Verhältnis der beiden Auslenkungen kann nun der Kopplungsgrad bestimmt werden:

$$\frac{D_g \frac{\phi_1}{\phi_2 - \phi_1}}{D_g \left(1 + \frac{\phi_1}{\phi_2 - \phi_1} \right)} = \frac{\phi_1}{\phi_2} = k \tag{1.40}$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchszubehör

Komponente	Dimension	Anzahl
Handstoppuhr		1
Pendelstange:	h_S=850mm $\pm$ 0.5mm	2
	m_S=131.40g $\pm$ 0.01g	
Pendelkörper	m_Z=174.54g $\pm$ 0.01g	2
Kopplungshaken	m_M=8.77g $\pm$ 0.01g	2

1.4 Durchführung

1.4.1 Erdbeschleunigung

Zuerst wollen wir die Schwerebeschleunigung g auf der Erde bestimmen. Miss dazu 25 mal die Schwingungsdauer t eines einzelnen ungekoppelten Pendels und trage die Messdaten in der Tabelle (A.2.1) ein. Miss anschliessend mit einer Schieblehre die in der Tabelle im Anhang angegebenen Dimensionen des Pendels. Diese werden später benötigt, um den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment des Pendels zu bestimmen.

1.4.2 Schwebung und Kopplungseigenschaften

Wir führen folgende vier Grössen ein:

τ_ω	Schwingungsdauer des gekoppelten Pendels bei *gleichphasiger* Schwingung
τ_Ω	Schwingungsdauer des gekoppelten Pendels bei *gegenphasiger* Schwingung
τ	Schwinungsdauer des gekoppelten Pendels bei Pendel A ruhend und Pendel B bewegt
T_S	Schwebungsperiode

a) Wähle eine Kopplung der Pendel, indem du die Fixiermuttern auf eine beliebige Höhe einstellst (diese Höhe muss für beide Pendel gleich sein). Miss nun den Abstand von der Drehachse der Pendel bis zur Fixiermutter und notiere den Wert in der Tabelle (A.2.2) im Anhang. *Wichtig:* Für diese gesamte Messreihe darf diese Höhe nicht mehr verändert werden! Ebenso sollte der horizontale Abstand der Pendelaufhängungen oben gleich bleiben.

b) Miss nun die oben eingeführten Grössen τ_ω 25 mal, τ_Ω 25 mal, τ 15 mal und T_S 5 mal. Trage deine Messdaten in der Tabelle (A.2.2) ein. Achte darauf, dass

   – beim gleich- bzw. gegenphasigen Schwingen die Pendel gleich stark ausgelenkt sind.

   – beim gegenphasigen Schwingen sowie bei den Messungen von τ und T_S die Pendel von der Mitte her gegen aussen losgelassen werden um ein Zusammenstossen der Pendelkörper zu vermeiden.

   – beim Loslassen dem Pendel kein zusätzlicher Impuls übertragen wird.

c) Bringe beide Pendel in die Ruhelage und lenke dann eines der Pendel aus. Halte dieses in dieser Position ruhig und warte, bis sich wieder ein Gleichgewicht eingestellt hat. Miss nun die horizontale Auslenkung der beiden Pendel in diesem Gleichgewichtszustand in Bezug auf die anfängliche Ruhelage. Du kannst diese Messung für insgesamt drei verschiedene Auslenkungen durchführen und die Daten in der Tabelle eintragen.

d) Wähle nun eine andere Kopplung der Pendel indem du die Fixiermuttern höher oder tiefer stellst und beginne wieder von vorne.

Gehe die Punkte a) bis d) für insgesamt drei verschiedene Kopplungen durch und erzeuge so drei vollständige Messreihen.

1.5 Auswertung

1.5.1 Erdbeschleunigung

a) Berechne den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwertes der gemessenen Schwingungsperioden t. Untersuche die Abweichung vom idealisierten Fall des mathematischen Pendels, welches durch die Formel

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.41}$$

gegeben ist. Dabei ist l die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung. Der Literaturwert der Schwerebeschleunigung auf der Erde sei mit $g = 9.81 m/s^2$ gegeben.

b) Berechne den Schwerpunkt des Pendels mit Hilfe der Formel

$$\vec{r}_S = \frac{\rho}{M_{tot}} \vec{e}_z \frac{\pi}{2} \left(R_Z^2 h_Z^2 + R_S^2 \left(h_S^2 - h_Z^2 \right) \right) \tag{1.42}$$

Hierbei ist R_Z der Aussenradius des Zylinders und h_Z die Höhe des Zylinders. R_S ist der Radius der Pendelstange und M_{tot} ist die Gesamtmasse des Pendels. Dieses ist aus Stahl und hat eine Dichte von $\rho = 7.68 g/cm^3$. Die Höhe der Pendelstange h_S sei mit $850mm$ anzunehmen.

c) Berechne durch Umstellen der Formel 1.41 aus deinen Messwerten die Erdbeschleunigung g und vergleiche sie mit dem theoretischen Wert. Benutze dazu den Abstand der Drehachse zum Schwerpunkt des Pendels für die Pendellänge l, den du mit der Formel 1.42 bestimmt hast.

d) Gib dein Ergebnis mit dem statistischen und systematischen Fehler an unter Berücksichtigung der üblichen Fehlerfortpflanzung.

1.5.2 Schwebung

a) Berechne für deine Messwerte für τ_ω, τ_Ω, τ und T_S jeweils den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwerts.

b) Verwende die Formeln

$$\tau = \frac{2\tau_\omega \tau_\Omega}{\tau_\omega + \tau_\Omega} \tag{1.43}$$

$$T_S = \frac{\tau_\omega \tau_\Omega}{\tau_\omega - \tau_\Omega} \tag{1.44}$$

die aus den Gleichungen 1.34a und 1.34b kommen, um aus den gemessenen Werten τ_ω und τ_Ω die Schwingungsdauer τ und die Schwebungszeit T_S zu berechnen. Setze dazu jeweils die Mittelwerte ein. Vergleiche die so bestimmten Werte für τ und T_S mit den Mittelwerten der gemessenen Werten.

c) Führe eine ausführliche Fehlerrechnung durch und gib an, ob deine Ergebnisse innerhalb der Fehlerschranken liegen. Können die in Formel 1.43 bzw. 1.44 beschriebenen Abhängigkeiten bestätigt werden?

1.5.3 Kopplungsmoment und Kopplungsgrad

a) Das Trägheitsmoment des Pendels J_P entspricht der Summe der Trägheitsmomente seiner Einzelkomponenten

$$J_P = J_S + J_Z + J_M \tag{1.45}$$

J_S ist das Trägheitsmoment des Pendelstabes, J_Z das Trägheitsmoment des Massenzylinders und J_M dasjenige der Fixiermutter. Bestimme das Trägheitsmoment des Pendels J_P mit Hilfe der untenstehenden Formeln

$$J_S = \frac{m_S}{12} \left(3R_S^2 + h_S^2 \right) + m_S L_{SM}^2 \tag{1.46}$$

m_S ist die Masse des Stabes, R_S dessen Radius, h_S die Höhe des Stabes und L_{SM} der Abstand des Schwerpunktes des Stabes zur Drehachse.

$$J_Z = \frac{m_Z}{12} \left(3 \left(R_Z^2 + r_Z^2 \right) + h_Z^2 + 12 L_{ZM}^2 \right) \tag{1.47}$$

m_Z ist die Masse des Zylinders, R_Z und r_Z sind der Aussen- bzw. Innenradius des Massenzylinders, h_Z die Zylinderhöhe und L_{ZM} der Abstand des Schwerpunktes des Zylinders zur Drehachse.

$$J_M = \frac{m_M}{12}\left(3\left(R_M^2 + r_M^2\right) + h_M^2 + 12L_{MM}^2\right) \tag{1.48}$$

Analog ist m_M die Masse der Fixiermutter, R_M und r_M sind der Aussen- bzw. Innenradius der Fixiermutter, h_M ihre Höhe und L_{MM} der Abstand der Fixiermutter zur Drehachse. Die ausführliche Herleitung hierzu befindet sich im Anhang (A.1). Bestimme das Trägheitsmoment J_P des Pendels.

b) Bestimme bei gegebener Pendellänge von $h_S = 850mm$ die Auslenkwinkel θ_{links} und θ_{rechts} bei der *statischen* Auslenkung jeweils für das linke und das rechte Pendel. Verwende den Mittelwert der jeweiligen drei bestimmten Auslenkwinkel θ_{links} und θ_{rechts}.

c) Berechne nun das *statische* Kopplungsmoment für die drei Messreihen mit dem Ausdruck

$$D_f = g\left(mL + m'l\right)\frac{\theta_{links}}{\theta_{rechts} - \theta_{links}} \tag{1.49}$$

wobei der Term $m'l$ (Fixiermutter) vernachlässigt werden darf. m ist die Masse des Pendels und L sei hier der Abstand des Schwerpunktes des Pendels zur Drehachse.

d) Das Kopplungsmoment lässt sich auch mit τ_ω und τ_Ω *dynamisch* bestimmen:

$$D_f = 2\pi^2 J\left(\frac{1}{\tau_\Omega^2} - \frac{1}{\tau_\omega^2}\right) \tag{1.50}$$

Berechne die *dynamischen* Kopplungsmomente und vergleiche deine Ergebnisse mit den *statisch* bestimmten Werten.

e) Berechne für alle drei Messreihen den Kopplungsgrad *statisch* mit der Formel

$$k = \frac{\theta_{links}}{\theta_{rechts}} \tag{1.51}$$

f) Bestimme schliesslich den Kopplungsgrad *dynamisch* mit der Formel

$$k = \frac{\tau_\omega^2 - \tau_\Omega^2}{\tau_\omega^2 + \tau_\Omega^2} \tag{1.52}$$

und vergleiche die so erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen aus der *statischen* Betrachtung.

g) Wie sieht allgemein der Zusammenhang zwischen dem Kopplungsgrad k und der Schwebungszeit T_S aus?

h) Wie liesse sich der Versuchsaufbau verbessern? Was könnte man bei der Durchführung dieses Experiments optimieren?

Appendix

A.1 Trägheitsmoment des Pendels

Das Trägheitsmoment des Pendels nach Abbildung 1.1 setzt sich aus den Trägheitsmomenten des Massenzylinders J_Z, des Stabes J_S und dem der Fixiermutter der Kopplung J_M zusammen. Dabei vernachlässigen wir die Trägheitsmomente der Koplungsschraube und des Fixierbolzens des Massenzylinders. J_Z und J_M können durch das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders und J_S durch das eines Zylinders ausgedrückt werden. Das Trägheitsmoment ist das Integral über den Abstand ds^2 aller Einzelmassen dm vom Zentrum des Körpers der Dichte ρ. Da es sich bei allen drei Körpern um Zylinder handelt, werden in den folgenden Berechnungen Zylinderkoordinaten, r', φ, z, verwendet. Die Rotation der Körper erfolgt in diesem Versuch um die y-Achse. Das kartesische x kann daher über den Zylinderradius r' und den Winkel φ zwischen x und r' ausgedrückt werden, gemäss $x = r'\cos(\varphi)$. Der Abstand s eines Massenpunktes von der Drehachse y lässt sich nach Pythagoras durch $s^2 = x^2 + z^2$ ausdrücken. In Zylinderkoordinaten drückt sich das Volumenelement dV durch $dV = r'dr'd\varphi dz$ aus. Das Massenelement dm ist dabei durch $dm = \rho dV$ mit dem Volumenelement verknüpft. Somit gilt allgemein für das Trägheitsmoment eines Zylinders:

$$\begin{aligned} J_{\text{Zylinder}} &= \int_M s^2 dm = \int_V s^2 \rho(s) dV \\ &\overset{\rho(s)=\rho}{=} \rho \int_V s^2 dV \\ &= \rho \int_{r'} \int_{\varphi} \int_z s^2 r' dr' d\varphi dz \\ &= \rho \int_{r'} \int_{\varphi} \int_z (x^2 + z^2) r' dr' d\varphi dz \end{aligned} \tag{A.1}$$

Mittels (A.1) lässt sich nun einfach das Trägheitsmoment J_Z^s des Massenzylinders der Dichte

ρ_Z, Höhe h, Innenradius r und Aussenradius R berechnen:

$$
\begin{aligned}
J_Z^s &= \rho_Z \int_{r'} \int_{\varphi} \int_{z} (x^2 + z^2) r' dr' d\varphi dz \\
&= \rho_Z \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (x^2 + z^2) r' dr' d\varphi dz \\
&= \rho_Z \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (x^2 r' + z^2 r') dr' d\varphi dz \\
&= \rho_Z \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (r'^3 \cos^2(\varphi) + z^2 r') dr' d\varphi dz \\
&= 2\rho_Z \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_0^{h/2} (r'^3 \cos^2(\varphi) + z^2 r') dr' d\varphi dz \\
&= 2\rho_Z \int_0^{2\pi} \int_0^{h/2} \left[\frac{r'^4}{4} \cos^2(\varphi) + \frac{z^2}{2} r'^2 \right]_r^R d\varphi dz \\
&= 2\rho_Z \int_0^{2\pi} \int_0^{h/2} \left[\frac{(R^4 - r^4)}{4} \cos^2(\varphi) + (R^2 - r^2)^2 \frac{z^2}{2} \right] d\varphi dz \\
&= 2\rho_Z 2\pi \int_0^{h/2} (R^2 - r^2) \frac{z^2}{2} dz + 2\rho_Z \int_0^{h/2} \int_0^{2\pi} \frac{R^4 - r^4}{4} \cos^2(\varphi) d\varphi dz \\
&= 2\rho_Z 2\pi \int_0^{h/2} (R^2 - r^2) \frac{z^2}{2} dz + 2\rho_Z \int_0^{h/2} \frac{R^4 - r^4}{4} \pi dz \\
&= 2\rho_Z \int_0^{h/2} \left[(R^4 - r^4 \frac{\pi}{4} + (R^2 - r^2) \frac{z^2}{2} 2\pi \right] dz \\
&= 2\rho_Z \left[(R^4 - r^4) \frac{\pi}{4} \frac{h}{2} + (R^2 - r^2) \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2} \right)^3 2\pi \right] \\
&= \rho \pi (R^2 - r^2) h \left[(R^2 + r^2) \frac{1}{4} + \frac{h^2}{12} \right]
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Mit der Masse m_Z des Massenzylinders und seinem Volumen $V_Z = \pi(R^2 - r^2)h$ erhält man aus (A.2):

$$
J_Z^s = \frac{m_Z}{12} \left[3(R^2 + r^2) + h^2 \right] \tag{A.3}
$$

Da in dem vorliegenden Versuch die Mittelpunkte der beiden Massenzylinder in einem gewissen Abstand L_{ZM} von ihrer Rotationsachse schwingen, muss nun noch das Trägheitsmoment des Massenzylinders bezüglich seines Aufhängepunktes mit dem Satz von Steiner berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
J_Z &= J_Z^s + m L_{ZM}^2 \\
&= \frac{m_Z}{12} \left[3(R_Z^2 + r_Z^2) + h_Z^2 \right] + m L_{ZM}^2 \\
&= \frac{m_Z}{12} \left[3(R_Z^2 + r_Z^2) + h_Z^2 + 12 L_{ZM}^2 \right]
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Das Trägheitsmoment J_M der Fixiermutter der Masse m_M, Höhe h_M, Innenradius r_M, Aussenradius R_M, sowie dem Abstand der Mutter zur Drehachse L_{MM} berechnet sich dann analog zu (A.2)-(A.4) zu:

$$
\begin{aligned}
J_M &= J_M^s + m_M L_{MM}^2 \\
&= \frac{m_M}{12} \left[3(R_M^2 + r_M^2) + h_M^2 \right] + m_M L_{MM}^2 \\
&= \frac{m_M}{12} \left[3(R_M^2 + r_M^2) + h_M^2 + 12 L_{MM}^2 \right]
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes J_S des Stabes der Höhe h_S, Masse m_S, Radius r und Abstand des Stabes zur Drehachse L_{SM} erfolgt ebenfalls analog zu (A.2)-(A.4), jedoch muss in diesem Fall der Radius dr' nicht von r bis R, sondern lediglich von 0 bis r integriert werden, woraus folgt:

$$\begin{aligned} J_S &= J_S^s + m_S L_{SM}^2 \\ &= \frac{m_S}{12}\left[3R_S^2 + h_S^2\right] + m_S L_{SM}^2 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Das Trägheitsmoment J_P des Pendels ergibt sich somit zu:

$$J_P = J_Z + J_S + J_M \tag{A.7}$$

A.2 Übersicht über die Messdaten

A.2.1 Erdbeschleunigung

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t $[s]$												

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Radius der Pendelstange R_S	
Länge der Pendelstange Δl_S	
Innenradius der Fixiermutter r_M	
Aussenradius der Fixiermutter R_M	

Höhe der Fixiermutter h_M	
Innenradius des Zylinders r_Z	
Aussenradius des Zylinders R_Z	
Höhe des Zylinders h_Z	

A.2.2 Schwebung und Kopplungseigenschaften

Höhe Fixiermutter	

#	τ_ω	τ_Ω	τ	T_S
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				

Auslenkung	links	rechts
1		
2		
3		

Höhe Fixiermutter	

#	τ_ω	τ_Ω	τ	T_S
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				

Auslenkung	links	rechts
1		
2		
3		

Höhe Fixiermutter	

#	τ_ω	τ_Ω	τ	T_S
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				

Auslenkung	links	rechts
1		
2		
3		